ANA
19.3.

Analysis - VO

Folgen sind spezielle Abbildungen $a: \mathbb{N} \to K$
werden durch Funktionswerte $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben

Eigenschaften

- ~~bijek~~ surjektiv, injektiv, bijektiv
- beschränkt (d.h. $\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N}: |a(n)| \leq C$)

  vgl. $f: X \to Y$ beschränkt, falls
  $\exists C > 0: \forall x \in X: |f(x)| \leq C$
- monoton steigend, monoton fallend
- konvergente Folgen (Folge + Grenzwert)

(*) $\forall \varepsilon > 0: \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon: |a(n) - A| < \varepsilon$

wobei ($|a(n) - A| < \varepsilon$
$\iff$
$a(n) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$)

Grenzwert $A \in K$

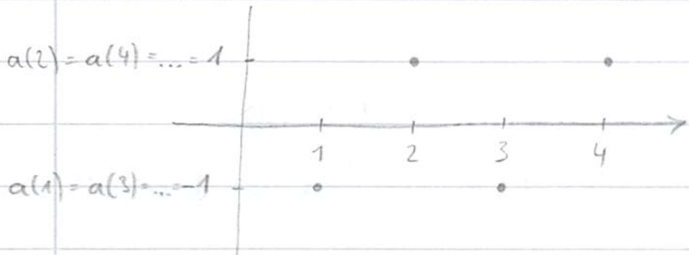
- divergente Folgen (haben keine Grenzwerte)
  falls (*) für keine n_ε oder A erfüllt ist

  a) unbeschränkte Folgen sind divergent (Satz 2.3.)
  b) Folgen mit mehreren (>1) Häufungspunkte sind divergent (Satz 2.4.)

Satz 2.3. Jede konvergente Folge ist beschränkt.
(Falls $a: \mathbb{N} \to K$ konv. $\Rightarrow$ a beschränkt)

Bemerkung: Gilt die Umkehrung
a beschränkt $\Rightarrow$ a konvergent ?

NEIN, denn



Folge $a = \left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt aber nicht konvergent

Satz 2.4. Der Grenzwert eine konvergenten Folge ist eindeutig

BW (indirekt) Annahme: $\lim\limits_{n \to \infty} a(n) = A \quad \wedge$

$$\lim_{n \to \infty} a(n) = \tilde{A} \quad \wedge$$

$$A \neq \tilde{A}$$

Dreiecksungleichung S1.9

Dann gilt: $0 \leq |A - \tilde{A}| = |A \underbrace{- a(n) + a(n)}_{=0} - \tilde{A}| \leq$

$$\underbrace{|A - a(n)|}_{< \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon} + \underbrace{|a(n) - \tilde{A}|}_{< \varepsilon \ \forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon} <$$

2ε für $\underbrace{\forall n \geq \max \{n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon\}}_{\text{wähle } n \text{ so dass } n \geq n_\varepsilon \wedge n \geq \tilde{n}_\varepsilon \text{ gilt}}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |A - \tilde{A}| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

ANA
19.3.

$\Rightarrow \quad |A-\tilde{A}| = 0 \quad$ (folgt aus arch. Axiom)

$$\Rightarrow \begin{cases} A-\tilde{A} = 0 \\ -A+\tilde{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \tilde{A}$$

$\lightning$

$\blacksquare$

Wie berechnet man den Grenzwert für eine Folge a?

2.5. Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergent. Dann gilt

(i) $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a(n)}_{\text{GW von } a} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} b(n)}_{\text{GW von } b} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (a(n)+b(n))}_{\text{GW von } a+b \,=\, (a(n)+b(n))_{n\in\mathbb{N}}}$

Beachte: Folge $a+b$ ist konvergent gegen $A+B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a(n) \cdot \lim_{n\to\infty} b(n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (a(n)\cdot b(n))}_{\text{GW der Folge } a\cdot b \,=\, (a(n)\cdot b(n))_{n\in\mathbb{N}}}$

Beachte: Folge $a \cdot b$ ist konvergent gegen $A \cdot B$

(iii) Falls $b(n) \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} b(n) = B \neq 0$

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a(n) = A}{\lim_{n\to\infty} b(n) = B} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}}_{\text{GW. von } \frac{a}{b} \,=\, \left(\frac{a(n)}{b(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}}$$

Beachte: $\frac{a}{b}$ konvergiert gegen $\frac{A}{B}$

Beispiele (Berechne Gw von ... falls dieser existiert)

Benutze: (i) $\forall \alpha > 0: \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

(ii) $\forall \alpha > 0: (a(n) = n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt
$\Rightarrow$ a divergierd ($\nexists$ Gw)

(iii) $\lim_{n \to \infty} C = C$ (konstante Folgen)

(i) Es gilt $a(n) = \frac{n-1}{n} \cdot \underbrace{n \cdot \frac{1}{n}}_{=1} =$

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{n \cdot \frac{1}{n} - 1 \cdot \frac{1}{n}}{n \cdot \frac{1}{n}} =$$

$$1 - \frac{1}{n}$$

Satz 2.5. (iii) (kann man direkt auf $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht anwenden)

Satz 2.5(i) kann man auf $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ anwenden

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} =$$

$$1 - 0 =$$

$$1$$

ANA
19.3.18

Also $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1

Folgen i Fo Brüche
↓
Suche höchste Potenz! im Nenner

(ii) Es gilt $a(n) = \frac{n^2+3}{5n^3+1} \cdot \underbrace{n^3 \cdot \frac{1}{n^3}}_{=1} =$

$$\frac{n^2 \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^3}}{5 \cdot n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}} =$$

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}}{5 + \frac{1}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{\underbrace{5+\frac{1}{n^3}}_{\neq 0}} \overset{\text{Satz 2.5 iii}}{=}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{1}{n^3} = 0$

$\lim_{n\to\infty} 5 = 5$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0+0}{5+0} = 0$$

(iii) Die Folge $a = \left(a(n) = \frac{n^3+2n^2+1}{n^2+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ist divergent, denn

BRUNNEN

$2 + 1/n^2 \geq 0$

$$\frac{n^3+2n^2+1}{n^2+3n} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n+2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} \geq \frac{n}{1+\frac{3}{n}}$$

$$\geq \frac{n}{4} = \frac{1}{4} \cdot n$$ ⇝ n wächst schon unbeschränkt

da $4 \geq 1 + 3/n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Höchste Potenz im Nenner > höchste Potenz im Zähler

⇝ Gw = 0

—"— < —"—

⇝ Folge unbeschränkt

—"— = —"—

⇝

2.6. Def. (Ordnung für Grenzwerte "≤")

Für die Folge $a, b : \mathbb{N} \to K$ schreibt man $a \leq b$, falls $a(n) \leq b(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

2.7. Proposition:

Seien $a, b : \mathbb{N} \to K$ konvergent und $a \leq b$

Dann gilt $A = \lim_{n \to \infty} a(n) \leq \lim_{n \to \infty} b(n) = B$

ANA
19.3.

Folgerung: (Sandwich-Lemma)

Seien $a, b, c : \mathbb{N} \to K$, $a \leq b \leq c$

und $\lim\limits_{n \to \infty} a(n) = \lim\limits_{n \to \infty} c(n) = A$

Dann folgt: $\lim\limits_{n \to \infty} b(n) = A$

Beispiele

- Die Folge $b = \left(b(n) = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent (nach Sandwich-Lemma), denn

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

$$\frac{2}{\sqrt{2n}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+n}+\sqrt{n}} \overset{n \geq 2}{\leq} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n+2} - \sqrt{n} =$$

Trick (bei Diff. zweier Wurzeln)

$$= \frac{2}{\sqrt{n}\cdot\underbrace{(\sqrt{2}+1)}_{\leq 3}} \geq \frac{2}{3\cdot\sqrt{n}}$$

$$\frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Nenner kleiner machen (nach oben abschätzen)

Abschätzen nach oben und nach unten

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{1/2}}}_{a(n)} \leq \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \leq \underbrace{2\cdot\frac{1}{n^{1/2}}}_{c(n)}$$

und $\lim a(n) = \frac{2}{3} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$

$\lim c(n) = 2 \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 2 \cdot 0 = 0$

BW von Prop 2.5

(i) $\lim_{n \to \infty} a(n) = A$

$\lim_{n \to \infty} b(n) = B$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a(n) + b(n)) = A + B$

$\frac{e}{\pi}$ } rational oder irrational ?

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| < \varepsilon \wedge$

$|b(n) - B| < \varepsilon$

$$\underbrace{|a(n) + b(n) - (A+B)|}_{(a(n)-A)+(b(n)-B)} \underset{\substack{\text{Dreiecks-}\\ \text{ungl.}\\ \text{(Satz 1.9)}}}{\leq} \underbrace{|a(n) - A|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|b(n) - B|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

wenn ε bel. klein ist, ist auch 2ε bel. klein

$\boxtimes$

(ii) $\lim_{n \to \infty} (a(n)\, b(n)) = AB$

$$|a(n)b(n) - AB| = |a(n)\,b(n) \overbrace{- Ab(n) + Ab(n)}^{0} - AB|$$

$$\leq |a(n)\,b(n) - A\,b(n)| + |Ab(n) - AB| =$$

$$\underbrace{|b(n)|}_{\substack{\leq C\\ \text{(Satz 2.4.)}}} \cdot \underbrace{|a(n) - A|}_{<\varepsilon} + |A| \cdot \underbrace{|(b(n) - B)|}_{<\varepsilon} \leq$$

$$\underbrace{(C + |A|)\,\varepsilon}_{\text{irgendeine bel. reelle Zahl}}$$

ANA 19.3.

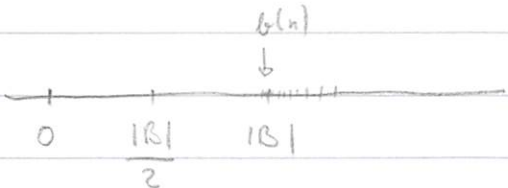
Def. Konv. ($<$) $\Leftrightarrow$ Def. Konv. ($\leq$)
└ offenes Intervall └ abgeschlossenes Intervall

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{A}{B}$, wobei $b(n) \neq 0$, $B \neq 0$

$$\left|\frac{a(n)}{b(n)} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a(n)B - Ab(n)}{b(n)B}\right| =$$

$$\frac{|\overbrace{a(n)B - AB}+\overbrace{AB - Ab(n)}|}{|b(n)|\cdot|B|} \underset{\text{Dreiecksungleichung B}}{\leq} \frac{|B|\cdot\overbrace{|a(n)-A|}^{<\varepsilon} + |A|\cdot\overbrace{|b(n)-B|}^{<\varepsilon}}{|b(n)|\cdot|B|} <^{*}$$

wählen ε: $0 < \varepsilon < \frac{|B|}{2}$ und
$|b(n)| > \frac{|B|}{2}$ gilt



$$* < \frac{2\cdot(|A|+|B|)}{|B|^2}\cdot\varepsilon \quad \blacksquare$$

n_ε steht nur aus beweistechn. Gründen in der Def.

In jeder bel. Umg. von A liegen alle Folgenglied bis auf endlich viele